Opción A

Ejercicio nº 1 de la Opción A de Junio de 2008

[2'5 puntos] Sea *f* la función definida, para x ≠ 0, por $f(x) = x\cdot e^{\frac{1}{x}}$. Determina las asíntotas de la gráfica de *f*.

Solución

La recta x = a es una asíntota vertical (A.V.) de la función f si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$

Veamos si x = 0 es A.V.

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\cdot e^{\frac{1}{x}} = 0\cdot e^{\frac{1}{0^+}} = 0\cdot e^{+\infty} = 0\cdot\infty$, expresión que podemos poner en la forma 0/0 ó ∞/∞ y le podremos aplicar la regla de L'Hopital (L'H) que dice " si f(x) y g(x) son funciones continuas y derivables en un entorno de "a", $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ y existe $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ ". El teorema se puede aplicar también si sale ∞/∞, y cuando x → ∞

Como $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\cdot e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{1/x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}, \text{aplicamos L'H}\right\} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}(-1/x^2)}{(-1/x^2)} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, **la recta x = 0 es una A.V. de la función *f*.**

Veamos el límite a la izquierda del 0

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x\cdot e^{\frac{1}{x}} = 0\cdot e^{\frac{1}{0^-}} = 0\cdot e^{-\infty} = 0\cdot\frac{1}{e^{+\infty}} = 0.0 = 0$$

La recta y = k es una asíntota horizontal (A.H.) de la función f si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = k$

Lo estudiamos en + ∞ y en - ∞

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\cdot e^{\frac{1}{x}} = \infty\cdot e^{\frac{1}{+\infty}} = \infty\cdot e^0 = \infty\cdot 1 = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x\cdot e^{\frac{1}{x}} = -\infty\cdot e^{\frac{1}{-\infty}} = -\infty\cdot e^0 = -\infty\cdot 1 = -\infty$$

La función **no tiene asíntotas horizontales.**

La recta y = mx+n es una asíntota oblicua (A.O.) de la función f si $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - (mx+n)) = 0$*, donde*

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \quad y \quad n = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - mx)$$

Lo estudiamos en + ∞ y en - ∞.

En + ∞.

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{+\infty}} = e^0 = 1$$

$$n = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty}(x\cdot e^{\frac{1}{x}} - x) = \lim_{x\to+\infty} x\cdot(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \infty\cdot 0$$

$$n = \lim_{x\to+\infty} x\cdot(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(e^{\frac{1}{x}} - 1)}{1/x} = \left\{\frac{0}{0}, \text{aplicamos L'H}\right\} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}(-1/x^2)}{-1/x^2} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$

La recta y = x+1 es una A.O. de la función f en + ∞.

Como $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - (mx+n)) = \lim_{x\to+\infty}(x\cdot e^{\frac{1}{x}} - (x+1)) = 0^+$, la función está por encima de la A.O.

En - ∞

$$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\cdot e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{-\infty}} = e^0 = 1$$

$$n = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to-\infty}(x\cdot e^{\frac{1}{x}} - x) = \lim_{x\to-\infty} x\cdot(e^{\frac{1}{x}} - 1) = -\infty\cdot 0$$

$$n = \lim_{x\to-\infty} x\cdot(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{x\to-\infty}\frac{(e^{\frac{1}{x}} - 1)}{1/x} = \left\{\frac{0}{0}, \text{aplicamos L'H}\right\} = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}(-1/x^2)}{-1/x^2} = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$

La recta y = x+1 es una A.O. de la función f en - ∞.

Como $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(mx+n)) = \lim_{x\to-\infty}(x\cdot e^{\frac{1}{x}}-(x+1)) = 0^-$, la función está por debajo de la A.O.

Ejercicio nº 2 de la Opción A de Junio de 2008

[2'5 puntos] Calcula $\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{(x^2-x)(x-1)}$

Solución

Es la integral de una función racional.
Calculamos primero una primitiva.

$$I=\int\frac{dx}{(x^2-x)(x-1)}=\int\frac{dx}{x(x-1)(x-1)}=\int\frac{dx}{x(x-1)^2}=\int\frac{Adx}{x}+\int\frac{Bdx}{(x-1)}+\int\frac{Cdx}{(x-1)^2}=$$

= ALn|x| + BLn|x-1|+C(x-1)$^{-2+1}$/(-2+1) + K= ALn|x| + BLn|x-1|-C/(x-1) + K

Calculamos las constantes A, B y C

$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}=\frac{A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx}{x(x-1)^2}$$

Igualamos numeradores
1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx
Para x = 0, 1 = A
Para x = 1, 1 = C
Para x = 2, 1 = 1(1)^2 + B(2) + 1.2; de donde B = -1. por tanto una primitiva es

I = 1Ln|x| - 1Ln|x-1|-1/(x-1) , y la integral definida pedida es

$$\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{(x^2-x)(x-1)}=\left[Ln|x|-Ln|x-1|-\frac{1}{x-1}\right]_{-2}^{-1}=$$ (Ln(1) – Ln(2) + 1/2) – (Ln(2) – Ln(3) + 1/3) =

= - 2Ln(2) + Ln(3) + 1/6

Ejercicio nº 3 de la Opción A de Junio de 2008

Un cajero automático contiene sólo billetes de 10, 20 y 50 euros. En total hay 130 billetes con un importe de 3000 euros.
(a) [1'25 puntos] ¿ Es posible que en el cajero haya el triple número de billetes de 10 que de 50?
(b) [1'25 puntos] Suponiendo que el número de billetes de 10 es el doble que el número de billetes de 50, calcula cuantos billetes hay de cada tipo.

Solución

x = billetes de 10 euros
y = billetes de 20 euros
z = billetes de 50 euros

Las soluciones tienen que ser números enteros y positivos.

130 billetes, se traduce en x + y + z = 130
3000 euros, se traduce en 10x + 20y + 50z = 3000
a)
Triple de billetes de 10 que de 50, se traduce en x = 3z.
Intentamos resolver el sistema
x + y + z = 130
10x + 20y + 50z = 3000
x = 3z.
Sustituyendo x = 3z en las dos primeras nos dá
4z + y = 130
80z + 20y = 3000.
Al resolver este sistema de dos ecuaciones obtenemos "3000 = 2600 + 0.z", lo cual es absurdo y el sistema no tiene solución.
b)
Doble de billetes de 10 que de 50, se traduce en x = 2z.
Intentamos resolver el sistema
x + y + z = 130
10x + 20y + 50z = 3000
x = 2z.
Sustituyendo x = 2z en las dos primeras nos dá

3z + y = 130
70z + 20y = 3000.
Al resolver este sistema obtenemos como solución x = 80, y = 10 y z = 40.

Hay 80 billetes de 10 euros
Hay 10 billetes de 20 euros
Hay 40 billetes de 50 euros

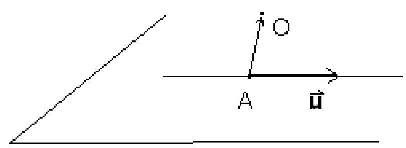
Ejercicio nº 4 de la Opción A de Junio de 2008

Dada la recta *r* definida por $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{1}$

(a) [1'25 puntos] Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a *r*.
(b) [1'25 puntos] Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y es perpendicular a *r*.

Solución

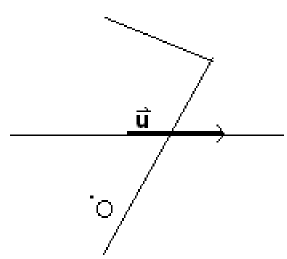
recta *r* , $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{1}$.
Un punto suyo es A(1,-1,2) y un vector director **u** = (2,3,1)
a)
Plano que pasa por el origen y contiene a *r*.



El plano contiene al punto O, y a los vectores independientes **AO** y **u** por tanto su ecuación es

det(**x – o,AO,u**) = 0 = $\begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ = x(7) – y(3) + z(-5) = 7x – 3y – 5z = 0

(b)
Plano que pasa por el origen y es perpendicular a *r*.



Si el plano es perpendicular a la recta *r* , el vector director de la recta **u** coincide con el vector normal del plano **n** = **u** = (2,3,1)
Un plano perpendicular a la recta sería 2x + 3y + z + K = 0, y como pasa por O(0,0,0), tenemos que 0+0+0+K=0, de donde K=0 y el plano pedido es 2x + 3y + z = 0

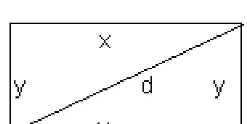
Opción B

Ejercicio nº 1 de la Opción B de Junio de 2008

[2'5 puntos] De entre todos los rectángulos de perímetro 8cm, determina las dimensiones del que tiene diagonal de menor longitud.

Solución

Es un problema de optimización,



Función a optimizar d = $\sqrt{x^2+y^2}$
Relación 2x + 2y = 8, de donde x + y = 4. Despejando y = 4 – x
Nuestra función es d(x) = $\sqrt{x^2+(4-x)^2}=\sqrt{2x^2-8x+16}$.

Le aplicamos la técnica de máximos y mínimos
(Si d'(a) = 0 y d''(a) > 0, x = a es un mínimo)

$$d'(x) = \frac{4x-8}{2\sqrt{2x^2-8x+16}} = \frac{2x-4}{\sqrt{2x^2-8x+16}}$$

De d'(x) = 0 tenemos 2x – 4 = 0, de donde x = 2, que será el posible mínimo.

$$d''(x) = \frac{2\sqrt{2x^2-8x+16}-(2x-4)\times\dfrac{(4x-8)}{2\sqrt{2x^2-8x+16}}}{\left(\sqrt{2x^2-8x+16}\right)^2}$$

$$d''(2) = \frac{2\sqrt{8}-0}{(\text{Nº positivo})} > 0$$, por tanto x = 2 es un mínimo.

El rectángulo tiene de dimensiones x = 2 e y = 4 – 2 = 2, es decir es un cuadrado de lado 2.

Ejercicio nº 2 de la Opción B de Junio de 2008

Sea $f : \Re \to \Re$ la función definida por $f(x) = e^{-2x}$

(a) [1 punto] Justifica que la recta de ecuación *y = -2ex* es la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa x = -1/2.

(b) [1'5 puntos] Calcula el área el recinto limitado por la gráfica e *f*, el eje de ordenadas y la recta tangente del apartado anterior.

Solución

$f(x) = e^{-2x}$

a)

La recta tangente a a la gráfica de *f* en el punto de abscisa x = -1/2 es y – f(-1/2) = f'(-1/2)(x + 1/2). Tenemos que ver que es y = -2ex

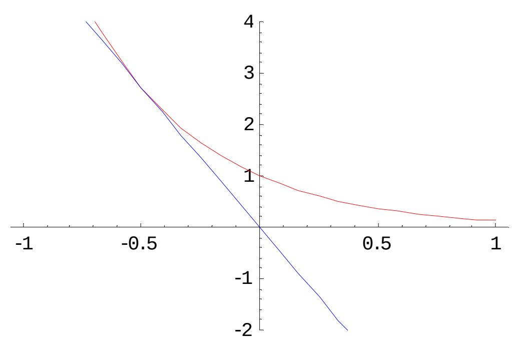
$f(x) = e^{-2x}$, de donde $f(-1/2) = e^1 = e$

$f'(x) = e^{-2x}(-2)$, de donde $f'(-1/2) = e^1(-2) = -2e$

La recta tangente es y – e = -2e(x + 1/2) = -2ex – e, de donde y = -2ex como me habían dicho

b)

La gráfica de $f(x) = e^{-2x}$ es exactamente igual que la de $f(x) = e^{2x}$ pero simétrica respecto al eje OY. Aunque no lo piden, un esbozo de las gráficas es



El área pedida es

$$\text{Área} = \int_{1/2}^{0}(\text{función} - \text{tangente})dx = \int_{1/2}^{0}(e^{-2x} - (-2ex))dx = \left[e^{-2x}\left(\frac{-1}{2}\right) + 2e\frac{x^2}{2}\right]_{-1/2}^{0} =$$

$$= (e^0(-1/2) + 0) - (e^1(-1/2) + 2(-1/2)^2) = (e/4 - 1/2)\ u^2$$

Ejercicio nº 3 de la Opción B de Junio de 2008

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{pmatrix}$.

(a) [1 punto] Halla los valores del parámetro *m* para los que el rango de A es menor que 3

(b) [1'5 puntos] Estudia si el sistema $A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ tiene solución para cada uno de los valores de *m* obtenidos en el apartado anterior.

Solución

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{pmatrix}$$

(a)

Si |A| ≠ 0, el rango de la matriz A es 3.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} m.m\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ 2^a F-1^a F \\ 3^a F-1^a F \end{matrix} = m.m\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & m-1 \\ 0 & 0 & m-1 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} m^2(m-1)^2$$

(1)Si una fila (columna) de un determinante está multiplicada por un número, dicho número puede salir fuera multiplicando.

(2) El determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de la diagonal principal.

|A| = 0 nos da $m^2(m-1)^2 = 0$, que tiene por soluciones m = 0 (doble) y m = 1 (doble)

Si m = 0 y m = 0, el rango de A es menor de 3.

b)

Estudia si el sistema $A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ según los valores de *m*

Si m = 0

La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, y rango(A) = 1

La matriz ampliada es $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y rango($A^*$) = 2, porque $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

Por el Teorema de Rouche como rango(A) = 1 ≠ rango(A^*) = 2, el sistema es incompatible y no tiene solución.

Si m = 1

La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, y rango(A) = 1

La matriz ampliada es $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, y rango($A^*$) = 1.

Por el Teorema de Rouche como rango(A) = 1 = rango(A^*), el sistema es compatible e indeterminado. Tiene infinitas soluciones.

Como el rango es uno hay una ecuación y una incógnita principal.

x + y + z = 1. Tomando $y = \lambda \in \Re$ y $z = \mu \in \Re$, las soluciones son $(1 - \lambda - \mu, \lambda, \mu)$ con $\lambda, \mu \in \Re$.

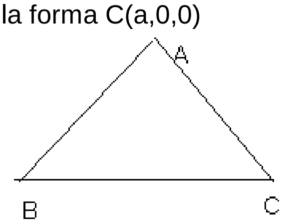
Ejercicio nº 4 de la Opción B de Junio de 2008

[2'5 puntos] Dado los puntos A(2,1,1) y B(0,0,1), halla los puntos C en el eje OX tales que el área del triángulo de vértices A, B y C es 2.

Solución

A(2,1,1) y B(0,0,1)

Como el punto C está en el eje OX, es de la forma C(a,0,0)



Sabemos que el área de un triángulo es ½ del módulo del producto vectorial de dos vectores con origen común, es decir
Área = 2 = (1/2)||**BAxBC**||

BA = (2, 1, 0); **BC** = (a, 0, -1)

$$\| \overrightarrow{BA} x \overrightarrow{BC} \| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ a & 0 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-1) - \mathbf{j}(-2) + \mathbf{k}(-a) = (-1, 2, -a)$$

||**BAxBC**|| = √ ($1^2 + 2^2 + a^2$)
De la expresión 2 = (1/2)||**BAxBC**||, obtenemos 4 = √ ($1^2 + 2^2 + a^2$) . Elevando al cuadrado y simplificando tenemos $a^2 = 11$, de donde a = ± √ (11). **Lo puntos son C(+ √ (11), 0, 0) y C'(- √ (11), 0, 0)**